Projekt OPVK - CZ.1.07/2.3.00/09.0017

„MATES - Podpora systematické práce s žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky“

Výjezdní soustředění matematických talentů

KOMBINATORIKA

Karlov pod Pradědem – 10.– 13. května 2012

01. Kostkou domina nazveme každou dvojici (a, b) *různých kladných* celých čísel od 1 do 40. Posloupnost kostek (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), $\dots$ se nazývá vyhovující, platí-li rovnosti $a_2 = b_1$, $b_2 = c_1$, $\dots$ Určete maximální délku vyhovující posloupnosti, ve které se každá kostka domina vyskytuje nejvýše jednou a žádné dvě kostky (a, b) a (b, a) se nevyskytují zároveň.

02. Existuje nekonečná posloupnost nezáporných čísel $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, v níž se každé celé nezáporné číslo k vyskytuje právě a_k-krát?

03. Určete počet slov z 15 písmen, z nichž každé je A nebo B, které obsahují (právě) dvě dvojhlásky AA, tři dvojhlásky AB, čtyři dvojhlásky BA a pět dvojhlásek BB. (Dvojhláska je libovolná uspořádaná dvojice po sobě následujících písmen slova.)

04. Skupinu c chlapců a d dívek postavíme do řady a určíme počet s míst v této řadě, kde stojí chlapec vedle děvčete. Dokažte, že aritmetický průměr všech hodnot s (přes všechna možná seřazení dané skupiny) je roven harmonickému průměru čísel c, d.

05. Každé neprázdné podmnožině $X \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ přiřadíme číslo $s(X)$ následujícím způsobem: jsou-li $x_1 > x_2 > \dots > x_k$ všechny prvky X, položíme $s(X) = x_1 - x_2 + x_3 - \dots + (-1)^{k+1} x_k$. Určete součet všech $2^n - 1$ čísel $s(X)$ při pevném n.

06. Pro dané liché $n > 1$ určete počet všech permutací p množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ splňujících podmínku

$$|p(1) - 1| + |p(2) - 2| + \dots + |p(n) - n| = \frac{n^2 - 1}{2}.$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

07. Pro každou posloupnost čísel $(a_1, a_2, \ldots, a_{2004})$ označíme M počet těch trojic indexů (i, j, k), kde $1 \leq i < j < k \leq 2004$, pro něž platí $a_j = 1 + a_i$ a $a_k = 1 + a_j$. Najděte největší možné M.

08. Pro dané celé $n > 1$ označme $M = \frac{1}{2}n(n^2 - 2n + 3)$ a předpokládejme, že čísla $1, 2, 3, \ldots, M$ jsou rozdělena do dvou skupin. Dokažte, že v některé z nich leží n čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takových, že

$$0 < a_2 - a_1 \leq a_3 - a_2 \leq a_4 - a_3 \leq \ldots \leq a_n - a_{n-1}.$$

09. Je dáno n množin tak, že každá z nich má právě k prvků a každé dvě z nich mají společný právě jeden prvek. Je-li $n > k^2 - k + 1$, pak všechny dané množiny mají společný prvek. Dokažte.

10. Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_n$ libovolné množiny, pak existuje n navzájem různých prvků $x_1, x_2, \ldots, x_n$ takových, že $x_i \in X_i$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, právě když pro každou neprázdnou množinu indexů $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ platí: Sjednocení $\bigcup_{i \in I} X_i$ obsahuje aspoň tolik prvků, kolik jich má I.

11. Tabulka o m řádcích a n sloupcích je zaplněna čísly $1, 2, \ldots, n$, každé z nich se v tabulce vyskytuje právě m-krát. Dokažte, že lze změnit pořadí čísel v každém sloupci tabulky tak, aby pak v libovolném řádku tabulky bylo každé z čísel $1, 2, \ldots, n$ zastoupeno právě jednou.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.