



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost



Univerzita Palackého
v Olomouci



GYMNÁZIUM
Jakuba Škody
PŘEROV

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt OPVK - CZ.1.07/2.3.00/09.0017

„MATES - Podpora systematické práce s žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky“

Výjezdní soustředění matematických talentů

ÚLOHY Z POLSKÉ MO JUNIORŮ

JAROMÍR ŠIMŠA, KARLOV POD PRADĚDEM, 10.-13. KVĚTNA 2012

A1 Pro libovolná kladná čísla a, b, c zdůvodni nerovnost

$$\frac{a}{a+1} + \frac{b}{(a+1)(b+1)} + \frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)} < 1.$$

A2 Platí-li pro kladná reálná čísla a, b rovnost $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab+3}$, nemohou být obě čísla a, b racionální. Vysvětli.

A3 Řeš rovnici $\frac{a+c-b}{b+c-a} = \frac{a}{b}$ v oboru lichých přirozených čísel a, b, c .

G1 Konvexní pětiúhelník $ABCDE$ má vnitřní úhly při vrcholech B a D oba pravé. Vysvětli, proč obvod trojúhelníku ACE není menší než dvojnásobek délky úhlopříčky BD .

G2 Uvnitř trojúhelníku ABC je zvolen bod P . Body D, E, F jsou obrazy bodu P v souměrnostech po řadě podle přímk BC, CA, AB . Za předpokladu, že trojúhelník DEF je rovnostranný, vysvětli, proč se přímky AD, BE a CF protínají v jednom bodě.

G3 Uvnitř strany AB rovnoběžníku $ABCD$ je zvolen bod E , uvnitř strany AD je vybrán bod F . Přímka EF protne přímky BC a CD po řadě v bodech P a Q . Zdůvodni, proč trojúhelníky CEF a APQ mají stejné obsahy.

Č1 Existují přirozená čísla a, b, c, d taková, že součin $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)$ je číslo, jehož zápis v desítkové soustavě končí dvojčíslím 10?

Č2 Najdi všechny trojice prvočísel p, q, r tak, aby platilo $q = p^2 + 6$ a $r = q^2 + 6$.

Č3 Vysvětli, proč rovnici $a^3 + 3b^6 = c^2$ vyhovuje nekonečně mnoho trojic přirozených čísel a, b, c .

- K1** Urči, kolik je všech patnáctimístných přirozených čísel N s vlastností: každé tři vedle sebe stojící číslice čísla N jsou navzájem různé a přitom jedna z nich je nula.
- K2** Každý bod roviny je obarven jednou ze dvou barev – buď červenou, nebo modrou. Zdůvodni, proč některý pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník v této rovině má všechny tři vrcholy stejné barvy.
- K3** Na ostrově žije 13 zelených, 15 hnědých a 17 červených chameleonů. Když se střetnou chameleoni dvou různých barev, oba okamžitě změni barvu na zbývající třetí. (Více než dva chameleoni se nikdy současně nestřetnou.) Může se stát, že po určité době budou mít všichni chameleoni stejnou barvu?