evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Palackého v Olomouci

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt OPVK – CZ.1.07/2.3.00/09.0017

MATES – Podpora systematické práce se žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky

---

Výjezdní seminář
Karlov pod Pradědem, 10.–13. května 2012

1. Házeme dvěma kostkami. Kolikrát musíme hodit, abychom měli zaručené, že dvakrát padne stejný součet.

2. 70 delegátů hovoří 11 různými jazyky, jedním jazykem nejvýše 15 z nich. Za oficiální je na konferenci považován takový jazyk, kterým hovoří alespoň 5 delegátů. Dokažte, že na konferenci jsou oficiální alespoň tři jazyky.

3. Z libovolných 65 čísel lze vybrat dvě čísla tak, aby jejich rozdíl byl dělitelný číslem 64. Dokažte.

4. Žádné z daných 17 celých čísel není dělitelné 17. Dokažte, že součet několika z nich je násobkem čísla 17.

5. Dokažte, že některé z čísel 9, 99, 999, 9 999, . . . je dělitelné číslem 2 009 (2 011).

6. Je-li přirozené číslo k nesoudělné s číslem 10, pak zápis některé jeho mocniny v desítkové soustavě končí pětičíslím 00001.

7. Dokažte, že z každé skupiny 10 různých dvoumístných čísel lze vybrat dvě skupiny různých čísel, které mají stejný součet. (Např. ze skupiny 10, 13, 17, 56, 78, 79, 80, 81, 96, 97 jsou to skupiny 10, 13, 56 a 79.)

8. Součin devíti různých přirozených čísel je roven číslu 150^{2011}. Dokažte, že součin některých dvou z nich je druhá mocnina přirozeného čísla.

---

9. Tabulka 6×6 je zaplněna čísly $-1, 0, 1$. Sečteme čísla v jednotlivých řádcích, sloupcích i na obou úhlopříčkách. Dostaneme tak $6 + 6 + 2 = 14$ různých součtů. Dokažte, že některé dva se sobě rovnají.

10. Dokažte, že z každých pěti druhých mocnin přirozených čísel lze vybrat dvě tak, že jejich rozdíl je dělitelný číslem 7.

11. Dokažte, že z 23 celých čísel se vždy dají vybrat dvě taková, že jejich druhé mocniny končí stejným dvojčíslím.

12. Vybereme-li z množiny $A = \{1, 2, \dots, 99, 100\}$ libovolných 21 různých čísel, najdou se mezi vybranými čtyři různá čísla x, y, u, v taková, že $x + y = u + v$.

13. Ke každému vrcholu pravidelného 100úhelníku je připsáno právě jedno z čísel $1, 2, \dots, 49$. Dokažte, že existují čtyři vrcholy A, B, C, D uvažovaného 100úhelníku, u nichž jsou připsána po řadě čísla a, b, c, d tak, že platí $AB \parallel CD$ a současně $a + b = c + d$.

14. Určete nejmenší přirozené číslo k s vlastností: když vybereme k různých čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 1999\}$, potom mezi nimi existují dvě, jejichž součet je 2000.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

15. Určete nejmenší přirozené číslo k s vlastností: když vybereme k různých čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 2000\}$, potom mezi nimi existují dvě, jejichž součet nebo rozdíl je 667.

16. Určete nejmenší přirozené číslo k s vlastností: když vybereme k různých čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, 100\}$, potom mezi nimi existují dvě, jejichž
a) rozdíl je dělitelný 11,
b) rozdíl je roven 11,
c) součet je roven 111.

17. Šachista se 77 dní připravoval na turnaj. V rámci přípravy odehrál každý den alespoň jednu partii. Celkově však nesehrál více než 132 partií. Dokažte, že v několika po sobě jdoucích dnech odehrál dohromady právě 21 partií.

18. Dokažte, že pro každé reálné číslo x a každé $k \in \mathbb{N}$ existují čísla $m, n \in \mathbb{Z}$ taková, že $1 \leq n \leq k$ a $\left|x - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{kn}$.

19. Dokažte, že existují čísla $a, b, c \in \mathbb{Z}$, každé v absolutní hodnotě menší než 10^6, pro která platí $0 < |a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$.

---

20. Jaký největší počet králů můžeme umístit na šachovnici, aby se navzájem neohrožovali?

21. Ukažte, že velikost alespoň jednoho vnitřního úhlu konvexního n úhelníku je rovna aspoň $\frac{n-2}{n}180°$.

22. rovině je dáno n bodů.
a) Pro $n = 3$ je alespoň jeden úhel jimi určený větší nebo roven $60°$.
b) Pro $n = 4$ je alespoň jeden úhel jimi určený větší nebo roven $90°$.
c) Pro $n = 5$ je alespoň jeden úhel jimi určený větší nebo roven $\frac{3}{5}180°$.
d) Pro $n =$ je alespoň jeden úhel jimi určený větší nebo roven $\frac{2}{3}180°$.

23. Dokažte, že žádný rovnostranný trojúhelník T nelze úpně pokrýt dvěma menšími rovnostrannými trojúhelníky T_1 a T_2.

24. V zahradě $80\,\mathrm{m} \times 90\,\mathrm{m}$ roste 365 stromů. Můžeme zaručit, že v některé obdélníkové části $5\,\mathrm{m} \times 8\,\mathrm{m}$ rostou alespoň tři stromy?

25. Dokažte, že do krabice tvaru válce výšky 60 cm a průměru dna základny 40 cm se nevejde 2630 pinpongových míčků s průměrem 3,8 cm.

26. Vybereme-li ve čtverci 3×3 libovolných deset bodů, pak některé dva z nich mají vzdálenost nejvýše $\sqrt{2}$. Dokažte.

27. Dokažte, že v obdélníku o rozměrech 197×94 neexistuje 24 000 bodů tak, aby vzdálenost mezi libovolnými dvěma byla alespoň 1.

28. Jáma kruhového tvaru o průměru 6 m je zakrytá 15 deskami. (Není vidět ani kousek jámy.) Dokažte, že šířka alespoň jedné desky je alespoň 40 cm.

29. Ve čtverci o straně 1 je libovolně umístěno 51 bodů. Dokažte, že některé tři leží v kruhu o poloměru $\frac{1}{7}$.

30. Ve čtverci o straně 10 cm je libovolně zvoleno 201 bodů.
a) Dokažte, že některé tři z nich leží v trojúhelníku o obsahu $1\,\mathrm{cm}^2$.
b) Dokažte, že některé tři z nich leží v trojúhelníku o obsahu $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

31. V trojúhelníku (uvnitř nebo na stranách) o obsahu 1 je dáno n bodů tak, že žádné tři neleží v přímce. Ukažte, že tři z nich jsou vrcholy trojúhelníku s obsahem nejvýše $\frac{1}{4}$. Úlohu řešte pro a) $n = 9$, b) $n = 7$, c) $n = 5$.

---

32. Jsou dány dvě číslice (1 a 2). Kolik existuje trojmístných čísel sestavených z těchto číslic takových, že se libovolná dvě čísla liší alespoň na dvou místech?

33. Ukažte, že existuje 8 čtyřmístných (16 pětimístných, 2^{n-1} n-místných) čísel sestavených z číslic 1 a 2 tak, že se libovolná dvě čísla liší alespoň na dvou místech a že více takových čísel není.

34. Ukažte, že neexistují více než 4 pětimístná (8 šestimístných, $\left\lfloor \frac{2^n}{n+1} \right\rfloor$ n-místných) čísla sestavených z číslic 1 a 2 tak, že se libovolná dvě čísla liší alespoň na třech místech.

35. Na soustředění přijelo n studentů. Někteří se znají, jiní ne. Ukažte, že existují alespoň dva studenti, kteří mají stejný počet známých.

36. 10 rodin z jednoho domu trávilo zahraniční dovolenou. Každá jela jinam a poslala domů pohlednice pěti z ostatních rodin. Dokažte, že některé dvě rodiny si poslaly pohlednice navzájem.

37. V autobuse je 38 cestujících, přitom ti, kteří se neznají, mají mezi cestujícími společného známého. Dokažte, že některý cestující má v autobuse aspoň 7 známých.

38. V libovolné skupině 6 lidí se najdou tři lidé, kteří se navzájem znají, nebo 3 lidé, kteří se navzájem neznají. Dokažte.

39. Každí dva ze 17 vědců si navzájem dopisují o právě jednom ze tří témat T_1, T_2, T_3. Dokažte, že někteří tři vědci si navzájem dopisují o stejném tématu T_i.

40. Tenisový turnaj 8 hráčů se hrál systémem „každý s každým jeden zápas“. Dokažte, že lze určit A, B, C, D tak, že hráč A porazil B, C i D, hráč B porazil C i D a hráč C porazil D.

41. Každá buňka tabulky 10 je obarvena červenou, modrou nebo bílou barvou, přitom právě 20 buněk je červených. Žádné dvě sousední buňky nejsou obarveny stejnou barvou. Domino se skládá ze dvou sousedních buněk a nazývá se *dobré*, právě když jedna buňka je modrá a druhá bílá.
a) Ukažte, že z takové tabulky je možné vždy vyřezat 30 dobrých domin.
b) Udejte příklad tabulky, ze které jde vyřezat 40 dobrých domin.
c) Udejte příklad tabulky, ze které nejde vyřezat více než 30 dobrých domin.

42. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou navzájem různá přirozená čísla. Definujme funkci $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ následujícím způsobem: $f(x) = 1$ pro všechna $x \leq 0$ a pro $x > 0$ položme

$$f(x) = 1 - f(x - a_1)f(x - a_2)\ldots f(x - a_n).$$

Ukažte, že existují taková kladná celá čísla n_0 a p, že pro všechna přirozená $n \geq n_0$ platí $f(n) = f(n + p)$.

43. Najděte nejmenší počet věží, které musíme umístit na standardní šachovnici 8×8 (9×9 s bílými poli v rozích), aby bylo některou věží ohroženo každé bílé pole.

44. Do buněk tabulky 2006×2006 byla zapsána (v libovolném pořadí) všechna čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, 2006^2\}$ (do každé buňky právě jedno číslo). Ukažte, že potom existují dvě buňky, které mají společnou stranu nebo společný vrchol, takové, že součet čísel v nich napsaných je dělitelný 4.

45. Kruhový terč o poloměru 12 cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7 cm.

46. Na šachovnici 20×20je vyznačeno 31 navzájem různých šachovnic tvaru 8×8. Dokažte, že existuje pole které patří alespoň a) šesti b) osmi vyznačeným šachovnicím.

47. Najděte všechna celá (přirozená) čísla a, b tak, aby platilo $11a + 17b = 161$.

48. Najděte všechna přirozená čísla N, která mají při dělení 7 zbytek 4, při dělení 8 zbytek 3, při dělení 9 zbytek 2 a při dělení 10 zbytek 1.

49. V oboru celých čísel řešte rovnici $4x^2 - 12xy + 9y^2 + 7x - 6y - 11 = 0$.

50. V oboru celých čísel řešte rovnici $3x^2 - 9xy + 6y^2 - x + 2 = 0$.

51. V oboru celých čísel řešte rovnici $\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{4}{5}$.

52. V oboru přirozených čísel řešte rovnici $abc = 2a + 3b + 5c$.

53. Najděte kořeny polynomu $3x^3 - 8x^2 + 13x - 2$.

54. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$4x^4 - 12x^3 - 7x^2 + 22x + 14 = 0,$$

víte-li, že má čtyři různé reálné kořeny, přičemž součet dvou z nich je číslo 1.

55. Zjistěte, pro které reálné číslo p mají rovnice

$$x^3 + x^2 - 36x - p = 0,$$
$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = 0$$

společný kořen.

56. Najděte kořeny následujících rovnic
a) $t^8 + 4t^6 - 10t^4 + 4t^2 + 1 = 0$.
b) $10t^6 + t^5 - 47t^4 - 47t^3 + t^2 + 10t = 0$.

Následují rovnice a jejich soustavy řešte o oboru reálných čísel

57.
$$x^2 + y^2 = 5,$$
$$x^3 + y^3 = 9.$$

58.
$$x(x + y) = 9,$$
$$y(x + y) = 16.$$

59.
$$2x^2 + 2xy + 1 = 4z,$$
$$2y^2 + 2yz + 1 = 4x,$$
$$2z^2 + 2zx + 1 = 4y.$$

60.
$$x^2 = y + z + 2,$$
$$y^2 = z + x + 2,$$
$$z^2 = x + y + 2.$$

61.
$$y + 3x = 4x^3,$$
$$x + 3y = 4y^3.$$

62. Na kruhové dráze vyjeli z téhož místa současně 2 cyklisté v opačných směrech. První jel rychlostí 6 m/s a potkal druhého cyklistu v prvním svém okruhu dvakrát, v druhém okruhu třikrát, ve třetím okruhu zase dvakrát, vždy mimo místo startu. Najděte co nejužší meze pro rychlost druhého cyklisty za předpokladu, že byla rovnoměrná.