

Projekt OPVK - CZ.1.07/2.3.00/09.0017

„MATES - Podpora systematické práce s žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky“

Výjezdní soustředění matematických talentů

Kostelec nad Černými lesy – duben 2012

RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.

1. Nechť L, M, N jsou po řadě vnitřní body stran AC, AB, BC trojúhelníku ABC , přičemž BL je osa vnitřního úhlu při vrcholu B uvažovaného trojúhelníku a přímky AN, BL, CM se protínají ve společném bodě. Dokažte tvrzení: Jsou-li úhly ALB a MNB shodné, je úhel LMN pravý.

(2 BODY)

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Uvažujme kružnici k opsanou danému trojúhelníku a označme S její střed. Nechť AQ a BP jsou průměry kružnice k . Dále nechť R je průsečík přímek AP a CQ . Dokažte, že (při obvyklém označení délek stran trojúhelníku ABC) platí

$$|SR| \geq \frac{bc}{a}.$$

(3 BODY)

3. Nechť P je vnitřním bodem trojúhelníku ABC a k_a nechť je kružnice opsaná trojúhelníku BCP . Dále nechť A' značí průsečík přímky AP s kružnicí k_a ($A' \neq P$). Analogicky pak sestrojíme body B' a C' . Určete, jakých hodnot nabývá výraz

$$\frac{|A'B|}{|A'C|} \cdot \frac{|B'C|}{|B'A|} \cdot \frac{|C'A|}{|C'B|}.$$

(3 BODY)

4. Necht V je ortocentrum a S střed kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC . Paty výšek z vrcholů A, B označme po řadě D, E . Dále necht K je průsečík přímek SD a BE , podobně L necht je průsečík přímek SE a AD . Označme U ($U \neq V$) je průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům VKD a VLE a M necht je střed strany AB . Dokažte, že body K, L, M leží na téže přímce (jsou kolineární), právě když U je středem kružnice opsané trojúhelníku ESD .

(4 BODY)

Čas na vypracování: 210 min.