evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Univerzita Palackého v Olomouci

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt OPVK – CZ.1.07/2.3.00/09.0017

MATES – Podpora systematické práce se žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky

---

Výjezdní soustředění matematických talentů
Velké Karlovice, říjen 2009

1. Nalezněte zbytek po dělení čísla 5^{20} číslem 26.

2. Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $37^{n+2} + 16^{n+1} + 23^n$ dělitelné sedmi.

3. Zjistěte, zda číslo $19^{1998} + 98^{1999}$ je dělitelné devíti.

4. Dokažte, že libovolné $n \in \mathbb{N}$ je $63^n + 7^{n+1}3^{2n+1} - 21^n 3^{n+2}$ dělitelné 13.

5. Dokažte, že číslo $(835^5 + 6)^{18} - 1$ je dělitelné číslem 112.

6. Dokažte, že 30 dělí $n^5 - n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

7. Nechť a, b jsou celá čísla taková, že $17|3a + 5b$. Doakžte, že pak i $17|4a + b$. Platí to i naopak?

8. Dokažte, že následující dvojice čísel jsou nesoudělná čísla pro všechna $n \in \mathbb{N}$: a) $6n + 5$ a $7n + 6$, b) $10n + 3$ a $15n + 4$, c) $4 \cdot 7^n + 3$ a $5 \cdot 7^n + 4$.

9. Nechť p je polynom s celočíselnými koeficienty, n celé, k přirozené číslo. Dokažte, že čísla $p(n + k)$ a $p(n)$ dávají při dělení číslem k stejný zbytek.

10. Číslo $2n^4 + n^3 + 50$ je dělitelné šesti právě pro ta přirozená čísla n, pro která je číslo $2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ dělitelné třinácti. Dokažte.

11. Určete počet všech přirozených čísel n menších než 2008, pro něž je číslo $2^n - n^2$ dělitelné sedmi.

12. Dokažte, že pro libovolná celá čísla a, b nesoudělná s číslem 65 je číslo $a^{12} - b^{12}$ dělitelné číslem 65.

13. Dokažte, že pro libovolná dvě různá prvočísla p, q číslo pq dělí číslo $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$.

14. Nalezněte všechna prvočísla p, pro která je číslo $5^{p^2} + 1$ dělitelné číslem p^2.

15. Určete všechny dvojice (m, n) přirozených čísel takové, že $m^2 - n$ dělí $m + n^2$ a $n^2 - m$ dělí $m^2 + n$.

16. Najděte všechna trojmístná čísla n, jejichž druhá mocnina končí stejným trojčíslím jako druhá mocnina čísla $3n - 2$

17. Číslo $2n^4 + n^3 + 50$ je dělitelné šesti právě pro ta přirozená čísla n, pro která je číslo $2 \cdot 4^n + 3^n + 50$ dělitelné třinácti. Dokažte.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

18. Najděte všechny uspořádané dvojice (p, q) prvočísel, pro které platí $3p^2 + 6p = 2q^2 + 7q$.

19. Najděte všechna celá čísla x, pro která platí:

a) $7x \equiv 15 \pmod 5$, b) $7x \equiv 9 \pmod{10}$,

c) $14x \equiv 23 \pmod{31}$, d) $72x \equiv 2 \pmod{10}$,

e) $8x \equiv 20 \pmod{12}$, f) $6x \equiv 27 \pmod{12}$,

g) $\begin{cases} 3x \equiv 5 \pmod 7 \\ 2x \equiv 3 \pmod 5 \\ 3x \equiv 3 \pmod 9. \end{cases}$

20. V oboru celých čísel řešte

a) $2x - 3y = 1$, b) $17x + 15y = 2$,

c) $16x + 48y = 40$, d) $10x + 4y = 16$,

e) $17x + 13y = 1$, f) $60x - 77y = 1$.

21. V oboru celých čísel řešte rovnici

$$2x^2 - 4xy + 3y^2 - x - 2y - 19 = 0.$$

22. Najděte všechny uspořádané dvojice (x, y) přirozených čísel, pro něž platí

$$x^2 + y^2 = 2005(x - y).$$

23. Najděte všechny dvojice $(a; b)$ celých čísel, jež vyhovují rovnici

$$a^2 + 7ab + 6b^2 + 5a + 4b + 3 = 0.$$

24. V oboru celých čísel řešte rovnici

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 + 7x - 6y - 11 = 0.$$

25. V oboru celých čísel řešte rovnici

$$3x^2 - 9xy + 6y^2 - x + 2 = 0.$$

26. V oboru celých čísel řešte rovnici

$$\frac{2x+1}{y} + \frac{3y-1}{x} = 5.$$

27. V oboru celých čísel řešte rovnici

$$\frac{2}{a} + \frac{3}{b} = \frac{4}{5}.$$

28. Najděte všechna řešení rovnice $xyz = 3(x + y + z)$ v oboru celých kladných čísel. Řešení, která se liší jen pořadím, nepovažujeme za různá.

29. Kolik existuje celých kladných čísel $x \le 2\,002\,000$ takových, že číslo $2\,002\,000$ dělí číslo $x^3 - x$.

30. Nalezněte všechny dvojice (m, n) celých čísel, které splňují rovnici

$$(m + n)^4 = m^2n^2 + m^2 + n^2 + 6mn.$$

31. Najděte všechna řešení rovnice $2^x + 2009 = 3^y5^z$ v množině nezáporných celých čísel.

32. Nalezněte všechna celá k taková, že čísla $4n + 1$ a $kn + 1$ jsou nesoudělná pro libovolné celé n.

33. Určete všechny dvojice (x, y) kladných celých čísel vyhovujících rovnici

$$x! + y! = x^y.$$