evropský sociální fond v ČR · EVROPSKÁ UNIE · MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY · OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost · Univerzita Palackého v Olomouci

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt OPVK – CZ.1.07/2.3.00/09.0017

MATES – Podpora systematické práce se žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky

---

Výjezdní seminář
Karlov pod Pradědem, 2.–5. února 2012

1. Zjednodušte součty následujících řad pro přirozené číslo n

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\ldots+\binom{n}{n}$
b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}$
c) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\binom{n}{6}+\ldots+\binom{n}{2\lfloor n/2\rfloor}$
d) $\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\binom{n}{6}+\ldots$
e) $\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\binom{n}{9}+\ldots$
f) $\binom{n}{0}-\binom{n}{3}+\binom{n}{6}-\binom{n}{9}+\ldots$
g) $\binom{n}{0}+\binom{n}{6}+\binom{n}{12}+\binom{n}{18}+\ldots$
g) $\binom{n}{0}-3\binom{n}{2}+3^2\binom{n}{4}-3^3\binom{n}{6}+\ldots$

2. Vyjádřete $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\cos 4x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\sin 4x$, … pomocí $\cos x$ a $\sin x$.
Dokažte, že $\sin 20^\circ$ a $\cos 20^\circ$ jsou iracionální čísla.

3. Zjednodušte součty následujících řad pro přirozené číslo n

a) $0+\sin\alpha+\sin 2\alpha+\ldots+\sin n\alpha$
b) $1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha$

4. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n>1$ platí rovnost

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n>1$ platí rovnost

$$\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{2n+1}+\operatorname{cotg}^2\frac{2\pi}{2n+1}+\operatorname{cotg}^2\frac{3\pi}{2n+1}+\ldots+\operatorname{cotg}^2\frac{n\pi}{2n+1}=\frac{n(2n-1)}{3}.$$

6. Dokažte, že pro racionální číslo θ takové, že $0<\theta<90$ a $\theta\neq 45$ je $\operatorname{tg}\theta^\circ$ iracionální číslo.

7. Petr našel na půdě 200 let starý popis cesty k pirátskému pokladu: „Jeď na ostrov X, postav se k šibenici, jdi směrem k morušovníku a počítej kroky. Potom se otoč doleva o 90° a po témž počtu kroků dojdeš do bodu s'. Opět se postav k šibenici, jdi směrem

---

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

k fíkovníku a počítej kroky. Potom se otoč o $90°$ vpravo a po ujití téhož počtu kroků dojdeš do bodu s''. Poklad je zakopán ve středu t mezi body s' a s''."

Petr přijel na ostrov, našel morušovník i fíkovník, ale po šibenici ani stopa. Jak má najít poklad?

8. (Napoleonova věta) Uvažujme libovolný trojúhelník ABC. Potom středy rovnostranných trojúhelníků (vně) sestrojených nad stranami trojúhelníku ABC tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

9. Uvažujme libovolný čtyřúhelník $ABCD$. Označme X, Y, Z, U středy čtverců vně sestrojených po řadě nad stranami AB, BC, CD, DA. Potom úsečky XZ a YU jsou navzájem kolmé a mají stejnou délku.

10. Čtverce $CBQP$ a $ACMN$ jsou po řadě vně sestrojeny nad stranami trojúhelníku ABC. Dokažte, že středy D, E těchto čtverců, střed G strany AB a střed F úsečky MP leží ve vrcholech čtverce.

11. Nechť $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ jsou dva shodně orientované rovnostranné trojúhelníky. Označme A_3, B_3 a C_3 po řadě středy úseček A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Potom $A_3B_3C_3$ je rovnostranný trojúhelník.

12. (Ptolemaiova věta) Pro libovolný (konvexní) čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$|AC| \cdot |BD| \leq |AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC|.$$

13. (Pompeiuova věta) Nechť X je libovolný bod roviny rovnostranného trojúhelníku ABC, který neleží na kružnici jemu opsané. Potom lze z úseček délek $|XA|$, $|XB|$ a $|XC|$ sestrojit trojúhelník.

14. Nechť a, b, c jsou komplexní souřadnice vrcholů trojúhelníku ABC. Potom jeho obsah je

$$\left| \frac{1}{4\mathrm{i}} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} \right| = \left| \frac{1}{4\mathrm{i}} \Big((b\bar{c} - \bar{b}c) - (a\bar{c} - \bar{a}c) + (a\bar{b} - \bar{a}b) \Big) \right| =$$
$$= \left| \frac{1}{4\mathrm{i}} (a\bar{b} - \bar{b}c + \bar{c}a - \bar{a}c + \bar{c}b - \bar{a}b) \right|.$$

15. Úhlopříčky AC a CE pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou po řadě rozděleny vnitřními body M, N tak, že

$$\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = r.$$

Najděte hodnoty r, jestliže body B, M a N leží na jedné přímce.