

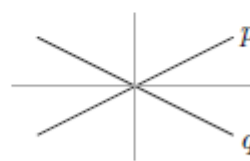
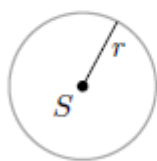
Výjezdní soustředění matematických talentů Chocerady – duben 2012

Geometrické množiny bodů

JOSEF TKADLEC

Tvrzení. *Množina bodů, které mají*

- (i) *danou vzdálenost r od daného bodu S , je kružnice $k(S, r)$.*
- (ii) *danou vzdálenost od dané přímky p , je dvojice přímek rovnoběžných s p .*
- (iii) *stejnou vzdálenost od dvou daných bodů A, B , je osa úsečky AB .*
- (iv) *stejnou vzdálenost od dvou daných přímek p, q , je dvojice přímek, které jsou osami úhlů vytvořenými přímkami p, q .*



Věta. (Věta o obvodovém úhlu) *Množina bodů, z nichž je daná úsečka AB vidět pod daným úhlem φ , je dvojice kružnicových oblouků symetrických podle přímky AB s krajními body A, B . Speciálně pro $\varphi = 90^\circ$ je hledanou množinou kružnice nad průměrem AB .*

Lehounké úlohy

Úloha 1. Jsou dány rovnoběžné přímky p, q . Najděte množinu středů úseček AB takových, že bod A leží na p a bod B na q .

Úloha 2. Je dán obdélník $ABCD$. Určete množinu bodů X , pro něž $|XA| + |XB| = |XC| + |XD|$.

Úloha 3. Je dána kružnice k a bod O . Určete množinu středů všech úseček OP , kde P probíhá kružnicí k .

Úloha 4. Jsou dány body A, B . Najděte všechny přímky p , jejichž vzdálenost od A je stejná jako od B .

KLÍČOVÁ SLOVA. geometrie, planimetrie, množiny bodů, konstrukční úlohy

Úloha 5. Je dána úsečka AB . Určete množinu obrazů A' bodu A v osově souměrnosti podle libovolné přímky procházející bodem B .

Úloha 6. Uvnitř kružnice k se středem O je dán bod P . Určete množinu středů všech tětiv AB kružnice k , které procházejí bodem P . Co kdyby bod P ležel vně kružnice k ?

Úloha 7. Polem vede rovná cesta, po které se rozjel autobus.

- (i) Kde musí člověk stát, aby autobus dostihnul, pokud běží stejnou rychlostí, jakou autobus jede?
- (ii) Co kdyby člověk vyrážel o minutu dřív?
- (iii) Co kdyby byl člověk dvakrát pomalejší?

Úloha 8. Po ramenech VX, VY pravého úhlu XVY se pohybují body A, B tak, že úsečka AB má konstantní délku d . Určete množinu středů M úseček AB .

Úloha 9. Je dána úsečka AB . Uvažme všechny dvojice kružnic k, l , které se dotýkají úsečky AB postupně v bodech A, B a navíc mají samy vnější dotyk v T . Určete množinu bodů T .

Běžné příklady

Úloha 10. Na úsečce AC je dán bod B . Určete množinu druhých průsečíků X shodných kružnic, z nichž jedna prochází body A, B a druhá body B, C .

Úloha 11. Osa úhlu ABC protne stranu AC trojúhelníku ABC v bodě D . Najdeme bod E tak, aby $|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle BAC|$ a $|CE| = |AD|$. Dokažte, že střed úsečky DE leží na BC .

Úloha 12. Určete množinu středů všech úseček AB , jejichž krajní body leží na dané půlkružnici t .

Úloha 13. Bod C probíhá pevný kružnicový oblouk nad tětivou AB . Určete množinu opsišť, těžišť, ortocenter a vepsišť všech takových trojúhelníků ABC .

Úloha 14. V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu opsišť trojúhelníků ABC , jejichž strana BC je průměrem kružnice k .
(MO 56–A–I–5)

Úloha 15. Bod C probíhá pevný kružnicový oblouk nad tětivou AB . Označme P patu kolmice vedené středem M strany BC na přímkou AC . Určete množinu bodů P .

Úloha 16. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod O tak, že $|\sphericalangle OBA| = |\sphericalangle OAC|$, $|\sphericalangle BAO| = |\sphericalangle OCB|$ a $|\sphericalangle BOC| = 90^\circ$. Určete poměr $|AC| : |OC|$.

Úloha 17. V trojúhelníku ABC platí $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$. Označme D, E, F průsečíky os vnitřních úhlů u vrcholů A, B, C s protějšími stranami. Ukažte, že $|\sphericalangle DEF| = 90^\circ$.

Literatura a zdroje

- [1] Nathan Altschiller-Court: *An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover Publications, New York, 2007.
- [2] V. V. Prasolov: *Zadachi po planimetrii*, MCCME, Moskva, 2006.
- [3] <http://www.problems.ru>