evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Palackého v Olomouci

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt OPVK - CZ.1.07/2.3.00/09.0017

„MATES - Podpora systematické práce s žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky“

Výjezdní soustředění matematických talentů
Chocerady – duben 2012

Teorie grafů

Josef Tkadlec, MFF UK

Úmluva: „Znání se“ je vzájemné.

Příklad 1. V jednom státě je 20 měst. Z každého vede 5 cest do některých jiných měst. Kolik cest je celkem ve státě?

Příklad 2. Ukažte, že v každé skupině lidí existují dva, kteří v ní mají stejný počet známých.

Příklad 3. Každé z patnácti měst je spojeno přímou leteckou linkou se sedmi jinými. Ukažte, že z každého města se dá (případně s několika přestupy) docestovat do každého jiného.

Příklad 4. Na večírku se sešlo 20 lidí, přičemž každý z nich zná přesně 10 jiných. Ukažte, že na večírku je přítomna čtveřice lidí taková, že první i druhý z nich zná třetího i čtvrtého.

(PraSe 2011)

Příklad 5. Na setkání bylo několik lidí. Každí dva, kteří se neznali, měli mezi ostatními přítomnými právě dva společné známé. Účastníci A a B se znali, ale neměli ani jednoho společného známého. Dokažte, že A i B měli mezi přítomnými stejný počet známých. (MO 61–A–I–2)

Příklad 6. V jistém městě mají vybudovanou síť na šíření pomluv, v níž si každý pomlouvač vyměňuje informace se třemi pomlouvačkami a každá pomlouvačka si vyměňuje informace se třemi pomlouvači. Jinak se pomluvy nešíří.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

a) Dokažte, že pomlouvačů a pomlouvaček je stejný počet.

b) Předpokládejme, že síť na pomlouvání je souvislá (pomluvy od libovolného pomlouvače a libovolné pomlouvačky se mohou dostat ke všem ostatním). Dokažte, že síť zůstane souvislá, i když jeden pomlouvač zemře. (MO 61–B–I–5)

c) Dokažte část b), pokud nahradíme v zadání všechny výskyty slova „třemi“ slovem „dvěma“.

d) Pokud nahradíme slovem „dvěma“ jen jeden výskyt slova „třemi“, ukažte, že tvrzení v části b) neplatí. Najděte protipříklad s nejmenším počtem pomlouvačů a pomlouvaček. (± MO 61–B–II–3)

Příklad 7. Na oslavě zná každý (včetně Pavla) přesně 7 chlapců a přesně 10 děvčat. Kolik nejméně lidí se na oslavě mohlo sejít? (Náboj 2011)

Příklad 8. Ve skupině 90 dětí má každé aspoň 30 kamarádů (kamarádství je vzájemné). Dokažte, že je lze rozdělit do tří 30členných skupin tak, aby každé dítě mělo ve své skupině aspoň jednoho kamaráda. (MO 61–A–III–5)

Návody

Návod 1. Každá cesta má dva konce, takže 50.

Návod 2. Počet známých je celé číslo z intervalu $\langle 0, n-1\rangle$. Může mít současně někdo 0 známých a někdo jiný $n-1$ známých?

Návod 3. Ukažte, že dvě města, která spolu nesousedí, mají společného souseda.

Návod 4. Najděte dva společné známé dvěma lidem, kteří se neznají.

Návod 5. Opakovaným použitím první podmínky „popárujte“ známé A-čka se známými B-čka (uvažujte dvojice (A, známý B) a naopak).

Návod 6. a) Je jich obou třikrát méně než známostí.

b) Předpokládejte, že se síť rozpadla, a vyjádřete počet známostí v jedné její části pomocí počtu pomlouvačů a a počtu pomlouvaček b. Spor vyjde kvůli dělitelnosti třemi.

c) Taková síť vypadá jako „kružnice“.

d) Postupujte jako v b). Místo sporu vyjde, že v každé části musejí být alespoň 4 pomlouvači a 3 pomlouvačky. Sestrojte příklad.

Návod 7. Vyjádřete dvěma způsoby počet známostí chlapec-děvče. Vyjde, že počet chlapců je násobek sedmi, tedy alespoň 14. Přesvědčte se, že známosti opravdu lze pro 34 účastníků nakombinovat.

Návod 8. Vytvářejte co nejmenší skupiny dětí, v rámci nichž bude každé z nich „spokojené“. Případné čtveřice typu „nudle“ rozbíjejte na dvě dvojice. Ukažte, že nikdy nebudete nuceni vyrobit čtveřici typu „hvězdička“ ani vícetice. Vzniklé dvojice a trojice snadno rozdělte do tří stejně početných skupin.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

U úloh opatřených zdrojem lze řešení nalézt v archivech na příslušných webových stránkách:

(i) MO: *www.math.muni.cz/~rvmo*,

(ii) PraSe: *mks.mff.cuni.cz*,

(iii) Náboj: *naboj.org*.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.