evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
Univerzita Palackého v Olomouci

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt OPVK – CZ.1.07/2.3.00/09.0017

MATES – Podpora systematické práce se žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky

---

Seminář z matematiky — Bílovec 16. 4. 12

1. Podél kružnice je rozmístěno 16 reálných čísel se součtem 7.
a) Dokažte, že existuje úsek pěti sousedních čísel se součtem aspoň 2.
b) Určete nejmenší k takové, že v popsané situaci lze vždy nalézt úsek k sousedních čísel se součtem aspoň 3.

2. Šachista se 77 dní připravoval na turnaj. V rámci přípravy odehrál každý den alespoň jednu partii. Celkově však nesehrál více než 132 partií. Dokažte, že v několika po sobě jdoucích dnech odehrál dohromady právě 21 partií.

3. Každému vrcholu pravidelného desetiúhelníku přiřadíme reálné číslo. Součet všech je 5. Ukažte, že existuje strana desetiúhelníku taková, že součet čísel v jejích vrcholech je 1.

4. Z čísel 1901, 1902, …, 2000 vytvoříme permutaci $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Pro takovouto permutaci vytvoříme posloupnost částečných součtů

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots \quad , \qquad s_{100} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{100}.$$

Pro kolik takových permutací není žádný člen posloupnosti $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ dělitelný třemi?

5. Najděte všechny možné hodnoty výrazu

$$\left\lfloor \frac{x}{\lfloor x \rfloor} \right\rfloor .$$

6. Určete všechny reálné kořeny rovnice $4x^2 - 40\lfloor x \rfloor + 51 = 0$.

7. V oboru reálných čísel řešte rovnici

$$\lfloor x \rfloor^2 - x^2 = \frac{1}{2}.$$

8. Nechť k je polokružnice sestrojená nad průměrem AB, která leží ve čtverci $ABCD$. Uvažujme její tečnu t_1 z bodu C (různou od BC) a označme P její průsečík se stranou

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky

AD. Nechť t_2 je společná vnější tečna polokružnice k a kružnice vepsané trojúhelníku CDP (různá od AD). Dokažte, že přímky t_1 a t_2 jsou navzájem kolmé.

9. V rovině jsou dány dvě kružnice takové, že kruhy jimi určené nemají společný bod. Dokažte, že velikost úseku které na jejich společné vnitřní tečně vytnou jejich společné vnější tečny, je rovna vzdálenosti dotykových bodů vnějších tečen.

10. Kružnice trojúhelníku vepsaná se dotýká jeho stran ve třech bodech. Určete velikosti úseček, na které tyto body dělí jednotlivé strany. Podobně určete velikosti úseček, které na stranách tvoří dotykové body kružnice trojúhelníku vně připsané. Odvoďte Heronův vzorec pro obsah trojúhelníku. Vyjádřete velikosti poloměrů kružnice vepsané a vně připsaných pomocí délek stran trojúhelníku.

11. Kružnice $k(S, r)$ a $l(O, R)$ se vně dotýkají v bodě T. Jejich společná tečna v bodě T protíná jejich vnější společnou tečnu v bodě M. Dokažte, že trojúhelník SOM je pravoúhlý, a vyjádřete jeho obsah pomocí poloměrů r a R daných kružnic.

12. Na tabuli jsou napsáni všichni přirození dělitelé přirozeného čísla N. Dva hráči A a B hrají hru, při které se střídají na tazích. V prvním tahu hráč A smaže číslo N. Bylo-li naposled smazáno číslo d, v následujícím tahu je nutno smazat buď dělitele, nebo násobek čísla d. Hráč, který nemůže táhnout, prohrává. Určete všechna čísla N, pro která hráč A může vyhrát nezávisle na tazích hráče B. (MEMO 2010)

13. Ukažte, že pro každá tři reálná čísla x, y, z, které splňují nerovnost

$$0 < x < y < z < 1,$$

platí také nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 < xy + yz + zx + z - x.$$

14. Určete počet všech desetimístných čísel, která mají ve svém desítkovém zápise každou z číslic $0, 1, \ldots, 9$.

15. Označme n součet všech desetimístných čísel, která mají ve svém dekadickém zápise každou z číslic $0; 1; \ldots; 9$. Zjistěte zbytek po dělení čísla n sedmdesáti sedmi.

16. Řekneme, že čtyřmístné číslo $n = \overline{abcd}$ má vyvážený součet číslic, právě když platí $a+b = c+d$. a) Stanovte, jaký je počet všech čtyřmístných přirozených čísel, která mají vyvážený součet číslic. b) Určete všechna čtyřmístná přirozená čísla mající vyvážený součet číslic, která jsou dělitelná číslem 792.

17. Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n pro které platí: Aritmetický průměr čísel m, n je dvojciferné číslo a vyměníme-li jeho číslice, dostaneme geometrický průměr čísel m, n.