Projekt OPVK - CZ.1.07/2.3.00/09.0017

„MATES - Podpora systematické práce s žáky SŠ v oblasti rozvoje matematiky“

Gymnázium Jakuba Škody, Komenského 29, 750 11 Přerov

Výjezdní soustředění matematických talentů Chocerady – duben 2012

Dostal žák správnou známku? aneb Pojednání o průměrech

Jaroslav Zhouf, PedF UK, Praha

Abstrakt: *Článek se zabývá několika typy průměrů počítaných ze zadaných hodnot. Každý průměr je dokumentován nějakou školskou úlohou, aby byla zdůvodněna využitelnost této teorie ve škole. Důraz je přitom kladen na úlohy ze základní školy, jsou však ukázány i úlohy ze střední školy a z matematické olympiády. Na závěr článku se objevuje úvaha, zda výpočet průměrné známky pomocí aritmetického průměru je ten nejsprávnější postup. Závěrečné zamyšlení má pomoci učitelům při rozhodování, jakou metodu celkového hodnocení žáka mají použít.*

Úvod

Tento článek se zabývá řešením situací, kde se užívá aritmetický průměr, geometrický průměr, harmonický průměr, kvadratický průměr atd., a to z pohledu matematického, hlavně však z pohledu didaktického.

Článek vznikl jako reakce na mou dlouholetou zkušenost s počítáním průměrných hodnot z několika zadaných hodnot lidmi, kteří už jsou mimo školu, ale i žáky ve škole, a dokonce i učiteli, kteří by měli tuto problematiku žáky učit. Mám v paměti případ, kdy kolegyně matematičky byly svým kolegou elektrikářem požádány, aby žákům vysvětlily pojem „harmonický průměr“, aby mohl být použit v uvedeném oboru. Kolega neuspěl, a tak jsem si řekl, že se trochu více budu zajímat, jak je to v mém okolí se znalostí počítání průměrných hodnot. Zjišťoval jsem tuto znalost i mezi našimi studenty na katedře a jen málokdo věděl, na co se ptám.

Ptám se žáků a studentů: „Počítali jste někdy ve škole nebo v životě aritmetický průměr několika hodnot?“ Odpověď zní „ano“. Tak se dále ptám: „A počítali jste někdy geometrický či harmonický či kvadratický průměr několika hodnot?“ To už téměř nikdo neví. Ptám se i kolegů: „Počítáte úlohy ve škole úlohy na využití aritmetického či geometrického či harmonického či kvadratického průměru?“ Odpověď na aritmetický průměr je pozitivní, ale na ostatní průměry bývá téměř vždy negativní. A jak je to ve skutečnosti, počítají nebo nepočítají takové úlohy? Na to existuje krátká odpověď. „Ano.“

Mám zkušenost, že žáci při přijímacích zkouškách na střední školu (a to dokonce do tříd se zaměřením na matematiku) počítají *průměrnou rychlost auta, které jede z místa A do místa B stálou rychlostí 80 km/h a zpět z místa B do místa A stálou rychlostí 120 km/h, za oba úseky dohromady jako (80+120)/2 km/h = 100 km/h*. Nebo když počítají *délku hrany průměrné krychlové krabice, která má stejný objem jako soubor krychlových krabic s hranami délek 10 cm, 20 cm, 60 cm, 60 cm, 70 cm, 80 cm, jako (10+20+60+60+70+80)/6 cm = 50 cm*. A stejně tak se chovají i mnozí dospělí, učitele nevyjímaje. A tady právě vidím dluh nás učitelů vůči mladým lidem.

Ve škole existuje řada úloh, kde počítáme nějaký průměr ze zadaných hodnot, např. „Vypočtěte průměrnou hodnotu z čísel 80 a 120.“ a míníme tím aritmetický průměr těchto dvou hodnot. Ve většině případů ale nezní úkol „Vypočtěte průměrnou hodnotu...“, nýbrž opisuje se to jinými slovy, např. „Jaká je délka hrany krabice, která má stejný objem jako šest krabic se zadanými délkami hran?“ Ono to je správně v učebnicích napsáno, ale tím, jak se nemluví o průměrné hodnotě, tak v okamžiku, kdy se zeptáme na průměrnou hodnotu (viz např. úloha výše na výpočet průměrné rychlosti), použije se jen jediný vzorec na výpočet aritmetického průměru. Kdybychom ale používali častěji otázku „Vypočtěte průměrnou hodnotu...“, tak by se žáci více zamysleli, jaký vzorec to mají vlastně použít. A tím by se předešlo mnoha chybným výpočtům.

Možná to je nadbytečná informace znát všechny možné termíny, není však nadbytečné umět správně počítat průměrné hodnoty z několika zadaných úloh.

Dále se tedy zaměřím na různé způsoby počítání průměrných hodnot. Na příkladech ukážu, že při různém počítání průměrných hodnot vycházejí různé výsledky. Tady předesílám a dále ukážu, že ale není jedno, jaký způsob výpočtu průměrné hodnoty použiji, že je vše dáno logikou věci a přírodními zákonitostmi.

Vše budu směrovat k základní škole, ale ukážu i příklady ze střední školy a i příklady obtížnější, jako jsou např. úlohy z matematické olympiády.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Úlohy na úrovni základní školy na výpočet průměrných hodnot

Nejprve uveďme úlohy, se kterými se setkáváme na základní škole.

Úloha 1: Vypočtěte průměrnou známku, jestliže žák dostal postupně známky 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, které mají stejnou váhu.

Řešení: Průměrná známka je

$$p = \frac{2+2+2+2+3+3+3+4+5}{9} = 3.$$

Úloha 2: Vypočtěte průměrnou rychlost p automobilu na celé své dráze, jestliže první hodinu jel rychlostí a = 80 km/h a druhou hodinu jel rychlostí b = 120 km/h.

Řešení: Průměrná rychlost se počítá jako podíl celkově ujeté dráhy a celé doby jízdy. V našem případě to je

$$p = \frac{a+b}{2} = \frac{80+120}{2}\ \text{km/h} = 100\ \text{km/h}.$$

Počítali jsme podle vzorce

$$A(a,b) = p = \frac{a+b}{2},$$

čemuž se říká *aritmetický průměr čísel a, b. Označili jsme ho* $A(a,b)$.

Úloha 3: Určete průměrnou rychlost automobilu, které jede z místa A do místa B stálou rychlostí a = 80 km/h a zpět z místa B do místa A stálou rychlostí b = 120 km/h.

Řešení: Je-li s vzdálenost mezi místy A, B, dále t doba jízdy z A do B a u doba jízdy z B do A, je průměrná rychlost rovna

$$p = \frac{2s}{t+u} = \frac{2s}{\frac{s}{a}+\frac{s}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{80}+\frac{1}{120}}\ \text{km/h} = 96\ \text{km/h}.$$

Vidíme, že tato hodnota je menší než v předchozím případě. Počítali jsme podle vzorce

$$H(a,b) = p = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b},$$

čemuž se říká *harmonický průměr čísel a, b. Označili jsme ho* $H(a,b)$.

Úloha 4: Tři Popelky přebírají hromadu hrachu. První Popelka by ho přebrala za a = 2 hodiny, druhá za b = 3 hodiny a třetí za c = 6 hodin. Za jak dlouho by přebrala hromadu „průměrná Popelka“?

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Řešení: První Popelka přebere za jednu hodinu $\frac{1}{2}$ hromady hrachu, druhá $\frac{1}{3}$ hromady a třetí $\frac{1}{6}$ hromady. Celkem tedy za jednu hodinu přeberou všechny tři $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ hromady. Jelikož Popelky jsou tři, budou přebírat tři hromady a bude jim to trvat průměrnou dobu

$$p = \frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \text{ hodiny} = 3 \text{ hodiny}.$$

Opět je to harmonický průměr, tentokrát ze tří čísel

$$H(a,b,c) = p = \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{3abc}{ab+ac+bc}.$$

Úloha 5: Obdélník má rozměry a = 2 cm, b = 8 cm. Jaké rozměry má čtverec stejného obsahu jako obdélník, tj. jak se musí „zprůměrovat“ hodnoty a, b?

Řešení: Je-li p strana čtverce, platí

$$p^2 = ab,$$

$$p = \sqrt{ab} = \sqrt{2\cdot 8} \text{ cm} = 4 \text{ cm}.$$

Je to méně, než kdybychom spočítali aritmetický průměr čísel a, b. Počítali jsme podle vzorce

$$G(a,b) = p = \sqrt{ab},$$

čemuž se říká *geometrický průměr čísel a, b. Označili jsme ho G*(*a*,*b*).

Úloha 6: Kvádr má rozměry a, b, c. Jaké rozměry má krychle stejného objemu jako kvádr, tj. jak se musí „zprůměrovat“ hodnoty a, b, c?

Řešení: Hrana hledané krychle je

$$G(a,b,c) = p = \sqrt[3]{abc}$$

což je geometrický průměr čísel a, b, c.

Úloha 7: V posledních třech letech byla úrodnost osiva, tj. číslo udávající, kolikrát více se sklidilo, než zaselo, rovna 25, 30, 36. Jaká byla průměrná úrodnost v těchto třech letech?

Řešení: V prvním roce se z jednoho metrického centu získalo 25 metrických centů, z nich se pak získalo $25\cdot 30$ metrických centů a z nich se nakonec získalo $25\cdot 30\cdot 36$ metrických centů. Při počítání průměrné úrodnosti p se prvním rokem získalo z jednoho metrického centu p metrických centů, z nich pak p^2 metrických centů a z nich p^3 metrických centů. Porovnáním obou hodnot dostaneme průměrnou hodnotu

$$p = \sqrt[3]{25\cdot 30\cdot 36} = 30,$$

a nikoli (25+30+36)/3 = 30,333...

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Úloha 8: Určete délku p strany dvou průměrných čtverců, které zaberou stejnou plochu jako čtverce o délkách stran a = 10 cm a b = 70 cm. (V úloze s reálným podtextem můžeme mluvit např. o čtvercových polích.)

Řešení: Má platit

$$2p^2 = a^2 + b^2,$$

$$p = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{10^2+70^2}{2}}\ \text{cm} = 50\ \text{cm}.$$

Tato hodnota je větší než aritmetický průměr ze zadaných hodnot. Počítali jsme podle vzorce

$$Q(a,b) = p = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

což je *kvadratický průměr čísel a, b. Označili jsme ho Q*(a,b).

Úloha 9: Určete délku p hrany šesti průměrných krychlí, které zaberou stejný objem jako krychle o délkách hran a = 10 cm, b = 20 cm, c = 60 cm, d = 60 cm, e = 70 cm a f = 80 cm. (V úloze s reálným podtextem můžeme mluvit např. o krychlových nádobách nebo kopání jam, kde každý den vykopeme jednu jámu a ptáme se na průměrnou jámu.)

Řešení: Má platit

$$6p^3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 + f^3,$$

$$p = \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3}{6}} = \sqrt{\frac{10^3+20^3+60^3+60^3+70^3+80^3}{6}}\ \text{cm} = 60\ \text{cm}.$$

Tato hodnota je větší než aritmetický průměr ze zadaných hodnot. Počítali jsme podle vzorce

$$C(a,b,c,d,e,f) = p = \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3+d^3+e^3+f^3}{6}},$$

což je *kubický průměr čísel a, b, c, d, e, f. Označili jsme ho C*(a,b,c,d,e,f).

Úlohy na rozhraní základní a střední školy na výpočet průměrných hodnot

Následující úlohy sice obsahem patří na střední školu, svojí obtížností by ale mohly být probírány i na škole základní.

Úloha 10: Pomocí pravítka a kružítka sestrojte úsečku délky $p = \sqrt{6}$.

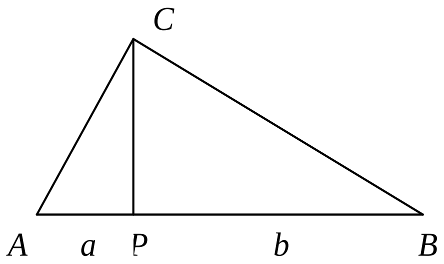
Řešení: Můžeme psát

$$\sqrt{6} = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{1\cdot 6} = \sqrt{4\cdot 1{,}5} = \ldots,$$

což znamená, že číslo $\sqrt{6}$ je geometrickým průměrem čísel 2 a 3, nebo 1 a 6, nebo 4 a 1,5 atd. Na sestrojení této úsečky pomocí dvou zadaných úseček nám může posloužit např. Euklidova věta o výšce. Její odvození je jednoduché i pro žáky základní školy. Na obr. 1 je pravoúhlý trojúhelník ABC svojí výškou CP rozdělen na dva podobné trojúhelníky ACP a

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

CBP, pro něž platí $\frac{p}{a}=\frac{b}{p}$, neboli $p=\sqrt{ab}$. Sestojíme tedy úsečku délky $a+b$ a nad ní jako nad průměrem Thaletovu kružnici. V bodě P vztyčená kolmice protne kružnici v bodě C, čímž získáme úsečku délky p. Na obr. 1 je a = 1,5 cm, b = 4 cm.



Obr. 1

Úloha 11: Vážíme maso na nerovnoramenných vahách. Nejprve ho položíme na levou misku vah a vyvážíme závažím $a = 2{,}25$ kg. Pak ho položíme na pravou misku vah a vyvážíme závažím $b = 1{,}44$ kg. Kolik váží maso skutečně, tj. jaká je průměrná hmotnost masa vypočtená z navážených hmotností?

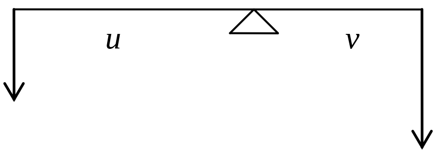
Řešení: K řešení využijeme rovnováhy na dvojzvratné páce. Má-li levé rameno vah délku u a pravé rameno délku v (obr. 2) a skutečná (průměrná) hmotnost masa je p kg, můžeme psát:

$$pu = 2{,}25v$$
$$pv = 1{,}44u$$

Vynásobením obou rovnic a následnou úpravou dostaneme

$$p^2uv = 2{,}25\cdot 1{,}44uv\,,$$
$$p=\sqrt{2{,}25\cdot 1{,}44}=1{,}5\cdot 1{,}2=1{,}8\,.$$

Skutečná hmotnost masa je 1,8 kg. Počítáme-li to pomocí aritmetického průměru, tak si myslíme, že jsme koupili 1,845 kg masa, což je pouhý psychologický moment.



Obr. 2

Úlohy na úrovni střední školy na výpočet průměrných hodnot

Přidejme ještě aspoň jednu úlohu z oblasti, která se v každém případě probírá až na střední škole.

Úloha 12: Odvoďte vzorec pro střední kvadratickou rychlost molekul plynu.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Řešení: Označme n počet molekul plynu v uvažovaném souboru, m hmotnost jedné molekuly plynu, v_1, v_2, ..., v_n skutečné rychlosti jednotlivých molekul, v průměrnou rychlost všech těchto molekul. Pro skutečné a průměrnou kinetickou energii molekul souboru platí

$$n\cdot\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2+\ldots+\frac{1}{2}mv_n^2,$$

$$v=\sqrt{\frac{v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2}{n}},$$

což je kvadratický průměr rychlostí jednotlivých molekul.

Přehled jednotlivých průměrů

V předchozích kapitolách jsme se seznámili s několika způsoby, jak se vypočítává průměrná hodnota z několika zadaných hodnot. Proveďme rekapitulaci těchto poznatků a přidejme ještě další informace na toto téma. Průměry uvedené výše byly počítány většinou jen ze dvou nebo tří hodnot, nyní tyto vzorce zobecníme na libovolný počet zadaných hodnot. Počet hodnot označme n a jednotlivé kladné hodnoty označme a_1, a_2, ..., a_n.

Zatím jsme se seznámili s těmito průměry:

Aritmetický průměr $$A(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$$

Harmonický průměr $$H(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

Geometrický průměr $$G(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

Kvadratický průměr $$Q(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}}$$

Kubický průměr $$C(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sqrt[3]{\frac{a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3}{n}}$$

Kromě těchto průměrů existuje nekonečně mnoho dalších. Jen pro zajímavost uveďme ještě další příklady průměrů, které však nemají ve školské matematice uplatnění (kromě úloh matematické olympiády); poslední dva platí jen pro dvě hodnoty:

Harmonicko-kvadratický průměr $$HQ(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\sqrt{\frac{n}{\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_n^2}}}$$

Kontraharmonický průměr $$KH(a,b)=\frac{a^2+b^2}{a+b}$$

Logaritmický průměr $$L(a,b)=\frac{b-a}{\ln b-\ln a},\quad a\neq b$$

Prvních šest uvedených průměrných hodnot se dá napsat jednou společnou formulí:

$$\bar{a}_k=\sqrt[k]{\frac{a_1^k+a_2^k+\ldots+a_n^k}{n}}$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Pro $k=-2$ jde o harmonicko-kvadratický průměr, pro $k=-1$ jde o harmonický průměr, pro $k \to 0$ jde o geometrický průměr, pro $k=1$ jde o aritmetický průměr, pro $k=2$ jde o kvadratický průměr a pro $k=3$ jde o kubický průměr.

V případě vážených průměrů má formule tvar

$$\overline{a}_k = \sqrt[k]{\frac{m_1 a_1^k + m_2 a_2^k + \ldots + m_n a_n^k}{n}},$$

kde m_1 je četnost výskytu hodnoty a_1, m_2 je četnost výskytu hodnoty a_2 atd.

Vztahy mezi průměry

Mezi uvedenými, ale i mezi těmi ostatními, průměry platí celá řada vztahů. Nejčastější z nich jsou nerovnosti mezi nimi. A z nich je asi nejznámější tzv. *AG-nerovnost*, která má pro libovolné kladné hodnoty *a, b* tvar (jak jsme viděli na výše na konkrétním případě)

$$G(a,b) \le A(a,b),$$

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

a pro *n* hodnot má tvar

$$G(a_1,a_2,\ldots,a_n) \le A(a_1,a_2,\ldots,a_n),$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}.$$

Rovnost v těchto nerovnostech platí, právě když se všechny průměrované hodnoty rovnají. Důkaz pro dvě hodnoty vypadá např. takto (používáme ekvivalentní úpravy):

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

$$ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$4ab \le a^2 + 2ab + b^2$$

$$0 \le (a-b)^2$$

Pro *n* hodnot se dá využít matematické indukce.

Analogicky by se dokazovaly další nerovnosti, takže bychom pro dvě kladné hodnoty *a, b* dostali:

$$Min(a,b) \le HQ(a,b) \le H(a,b) \le G(a,b) \le A(a,b) \le Q(a,b) \le C(a,b) \le KH(a,b) \le Max(a,b)$$

$$Min(a,b) \le \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}} \le \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \le \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \le \frac{a^2+b^2}{a+b} \le Max(a,b)$$

Navíc pro logaritmický průměr platí

$$G(a,b) \le L(a,b) \le A(a,b),$$

$$\sqrt{ab} \le \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \le \frac{a+b}{2}.$$

Podle výše uvedeného označení můžeme psát nerovnosti

$$\ldots \le \overline{a}_{-2} \le \overline{a}_{-1} \le \overline{a}_0 \le \overline{a}_1 \le \overline{a}_2 \le \overline{a}_3 \le \ldots$$

Také platí několik zajímavých rovností:

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

$$\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2}}$$

(geometrický průměr dvou čísel je roven geometrickému průměru jejich harmonického a aritmetického průměru)

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2}}$$

(kvadratický průměr dvou čísel je roven geometrickému průměru jejich kontraharmonického a aritmetického průměru)

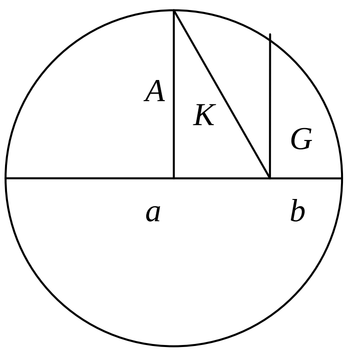
$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2ab}{a+b} + \frac{a^2+b^2}{a+b}\right)$$

(aritmetický průměr dvou čísel je roven aritmetickému průměru jejich harmonického a kontraharmonického průměru)

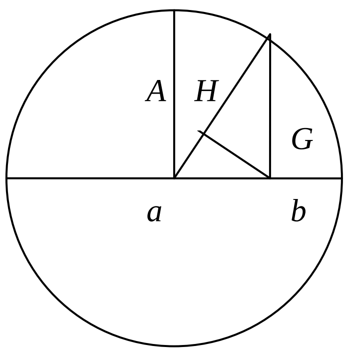
$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2\right)}$$

(aritmetický průměr dvou čísel je roven kvadratickému průměru jejich geometrického a kvadratického průměru)

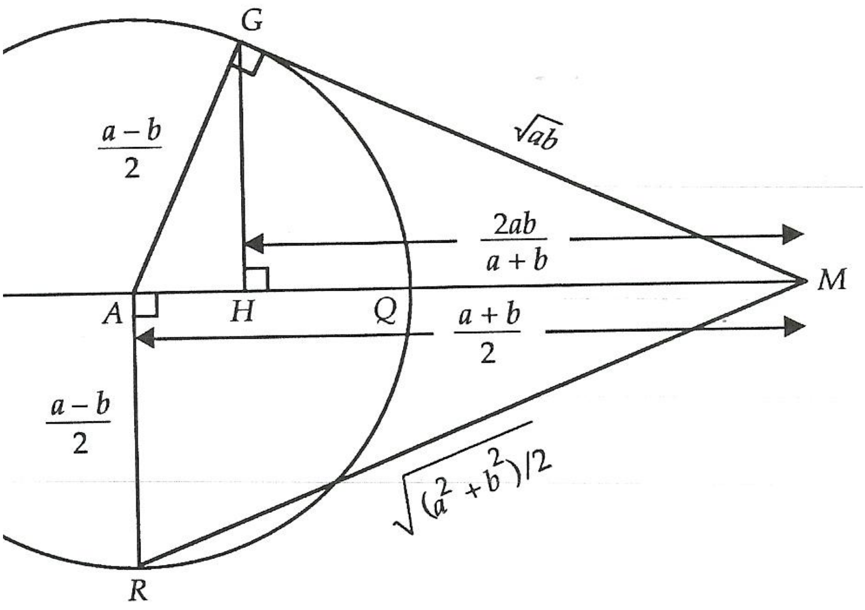
Důkazy těchto nerovností se dají také provést graficky „beze slov“ (obr. 3, obr. 4 a obr. 5).



Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

Těchto nerovností se dá využít při důkazech některých tvrzení, které spíše spadají do matematické olympiády.

Úloha 13: Dokažte, že pro kladná čísla *a*, *b*, *c* platí

$$(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 9abc\,.$$

Řešení: Dokazovanou nerovnost získáme, pokud vynásobíme nerovnosti:

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

Úloha 14: Ze všech pravoúhelníků o daném obvodu *o* najděte ten, který má největší možný obsah.

Řešení: Označme *a*, *b* délky stran hledaného pravoúhelníku a *S* jeho obsah. Platí

$$\sqrt{S}=\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}=\frac{o}{4}=\text{konstanta}\,.$$

Obsah *S* bude největší, právě když bude $a=b$, tj. když to bude čtverec.

Úloha 15: Navrhněte rozměry krabice ve tvaru kvádru, aby měla předepsaný objem *V* a aby se spotřebovalo co nejméně materiálu, jestliže neuvažujeme žádný materiál na překrývání kvůli přelepování.

Řešení: Označme *a*, *b*, *c* délky hran hledaného kvádru, *V* jeho objem a *P* jeho povrch. Platí

$$\frac{P}{6}=\frac{ab+bc+ca}{3}\geq\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}=\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=\sqrt[3]{V^2}=\text{konstanta}\,.$$

Povrch *P* bude nejmenší, právě když bude $ab=bc=ca$, tj. právě když bude $a=b=c$, tj. když to bude krychle.

V matematické olympiádě pro rok 2008/2009 bude úloha, v níž jsou opět nerovnosti mezi průměry. Prostřední průměr ale nemá název. Úlohu zde řešit nebudeme, protože bude předmětem soutěže v příštím školním roce.

Úloha 16: Dokažte, že pro libovolná kladná čísla *a*, *b* platí nerovnosti

$$\frac{a+b}{2}\leq\frac{2\left(a^2+ab+b^2\right)}{3(a+b)}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

a že rovnost nastane, právě když $a=b$.

Medián a modus

Ještě bychom neměli zapomenout na dvě průměrné hodnoty, medián a modus. Nejprve *n* uvažovaných hodnot srovnáme podle velikosti $a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$.

Medián $\tilde{a}$ těchto hodnot je číslo s indexem $\frac{n+1}{2}$ pro *n* liché a aritmetický průměr čísel s indexy $\frac{n}{2}$ a $\frac{n}{2}+1$ pro *n* sudé.

Modus $\hat{a}$ těchto hodnot je číslo, které se mezi uvažovanými hodnotami vyskytuje nejčastěji.

Jak vypočítat průměrnou známku z předmětu

Teď se dostáváme ke klíčové otázce celého článku, a sice jak bychom měli správně vypočítat výslednou známku z předmětu z několika daných známek. Viděli jsme, že máme nepřeberné množství možností, jak to udělat. A který průměr si tedy máme zvolit?

Zkusme nejprve spočítat průměrnou známku ze dvou známek pomocí různých průměrů. Řekněme, že žák dostal dvě známky, a si 1 a 5. V tom případě jsou hodnoty průměrů:

$$HQ(1;5)=\sqrt{\frac{2\cdot1^2\cdot5^2}{1^2+5^2}}\doteq1{,}387$$

$$H(1;5)=\frac{2\cdot1\cdot5}{1+5}\doteq1{,}667$$

$$G(1;5)=\sqrt{1\cdot5}\doteq2{,}236$$

$$A(1;5)=\frac{1+5}{2}=3$$

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

$$\frac{3\left(1^2+1\cdot 5+5^2\right)}{2\left(1+5\right)} \doteq 3{,}444$$

$$Q(1;5)=\sqrt{\frac{1^2+5^2}{2}} \doteq 3{,}606$$

$$C(1;5)=\sqrt[3]{\frac{1^3+5^3}{2}} \doteq 3{,}979$$

$$KH(1;5)=\frac{1^2+5^2}{1+5} \doteq 4{,}333$$

$$\sqrt[7]{\frac{1^7+5^7}{2}} \doteq 4{,}527$$

Vypočtené hodnoty potvrzují výše uvedené nerovnosti. Důležité je uvědomit si, že průměrná hodnota musí ležet mezi čísly 1 a 5, nemusí však být uprostřed.

Hlavně však je vidět, že by žák mohl dostat jakoukoli známku od 1 do 5. Tady nás určitě napadne otázka, jaký výpočet bychom měli používat, která z vypočtených hodnot představuje tu správnou známku.

Dvě zcela odlišné známky je krajní případ, který asi nenastane, vypočtěme tedy ještě ve dvou reálnějších případech několik průměrů známek. Mějme přitom na paměti, že známky mají stejnou váhu. Pokud by tomu tak nebylo, počítali bychom příslušnou známku vícekrát. Vždy si přitom uvědomme, že každý vypočtený průměr musí ležet mezi nejmenší a největší získanou známkou.

Nejprve výpočet proveďme pro skupinu známek 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5. Zde jsou některé průměry rovny:

$$A(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5)=2{,}6$$
$$G(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5)=1{,}904$$
$$H(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5)=1{,}471$$
$$Q(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5)=3{,}256$$
$$Q(1;1;1;1;1;5;5;5;5;5)=3{,}606 \text{ (pozor, místo 1 je 5)}$$
$$\tilde{a}(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5)=1$$
$$\hat{a}(1;1;1;1;1;1;5;5;5;5)=1$$

A totéž proveďme pro skupinu známek 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5. Pak jsou tyto průměry rovny:

$$A(2;2;2;2;3;3;3;5;5)=3$$
$$G(2;2;2;2;3;3;3;5;5) \doteq 2{,}806$$
$$H(2;2;2;2;3;3;3;5;5) \doteq 2{,}647$$
$$Q(2;2;2;2;3;3;3;5;5) \doteq 3{,}180$$
$$\tilde{a}(2;2;2;2;3;3;3;5;5)=3$$
$$\hat{a}(2;2;2;2;3;3;3;5;5)=2$$

Při větším počtu známek a jejich rovnoměrnějším rozdělení už rozdíly nejsou tak veliké, takže je téměř jedno, podle jakého průměru známku počítáme. Když bychom se ale rozhodli pro medián nebo modus, mohli bychom se dopustit asi největší odchylky.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

I přes tento víceméně pozitivní závěr z výpočtů různých průměrů se přiznám, že vůbec nevím, proč se nejčastěji počítá známka jako aritmetický průměr obdržených známek. Klidně si dovedu představit, že si známku znázorním v zápisníku jako čtvereček o straně délky, která je rovna obdržené známce. Na závěr si pak udělám čtverec, který má obsah stejný jako součet obsahů všech dílčích čtverečků, čímž vlastně použiji kvadratický průměr. Též si umím představit, že známka bude představovat počet hodin, za které žák stihne udělat celkovou práci. Pak je to převedeno na úlohu o Popelkách a k výpočtu průměrné známky se použije harmonický průměr.

Takže znovu opakuji, že nevím, proč se používá aritmetický průměr k výpočtu průměrné známky. Jediný důvod dle mého je snad jeho jednoduchý výpočet. A možná i jeho tradiční používání (a to je opět asi kvůli jeho jednoduchosti).

Význam článku neboli závěr

Dám-li otázku, k čemu je tento článek dobrý, tak si umím představit, co mi někdo odpoví. Já si však myslím, že článek měl upozornit na to, že bychom měli ve škole používat termíny „geometrický průměr“, „harmonický průměr“ atd. a ne jen „průměr“, aby, když mají průměrnou hodnotu vypočítat, použili ten správný vzorec a nenasadili na výpočet jen aritmetický průměr.

Článek má tedy sloužit k zamyšlení, že není nic absolutní, tak jak nám to bylo někdy řečeno, ale máme se snažit uvažovat nad alternativními metodami uvažování. Co se týče konkrétně známkování, je vidět, že např. k aritmetickému průměru bychom měli přidat ještě komplexní pohled na žáka, tj. ohodnotit i odpozorované další schopnosti a možná i morální vlastnosti.

Literatura

[1] Bartsch, H. J., Matematické vzorce. Mladá fronta, Praha 2002.
[1] Nelsen, R. B., Proofs without Words. The Mathematical Association of America, Washington 1993.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.